

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И РЕШЕНИЕ 2 ЗАДАНИЯ

математическая логика

— это наука о высказываниях.

(пример высказывания: «я люблю информатику»

высказывание может быть:

- ✦ истинно [true] = 1
- ✦ ложно [false] = 0

алгебра логики

— это инструмент обработки высказываний. с помощью набора операций из одних высказываний строятся другие.

операция = соответствие

(пример: сложение $a + b = c$

- ✦ паре чисел a, b ставится в соответствие c
 $F[a, b] = c$ — функция от чисел a и b
- ✦ функция от числа [-ел] = соответствие
операция = функция

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ



1 логическое отрицание [инверсия/логическое «не»]

если выражение истинно,
то результат будет ложным.
и наоборот, если исходное
выражение ложно,
то результат будет истинным.

$\neg A$ или $\bar{A}$

A	$\neg A$
0	1
1	0

2 логическое сложение [дизъюнкция/логическое «или»]

истинно, если хотя бы что-то из A или
B - истинно

$A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3 логическое умножение [конъюнкция/ логическое «и»]

истинно, если оба исходных
выражения A и B истинны
одновременно.

$A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4 логическое следование [импликация «если а, то в»]

ложно, если следствие не
наступило, когда была причина
[причина [A] истинна, а
следствие[B] ложно].

$A \rightarrow B$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



5 логическая равнозначность [эквивалентность/тождество]

истинно, если оба исходных выражения одновременно истинны или ложны.

$$A \leftrightarrow B \text{ или } A \equiv B$$

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

приоритет логических операций

в сложном логическом выражении

- 1 инверсия [логическое «не»] $\neg$
- 2 конъюнкция [логическое «и»] $\wedge$
- 3 дизъюнкция [логическое «или»] $\vee$
- 4 импликация [логическое следование] $\rightarrow$
- 5 эквивалентность [логическая равнозначность] $\leftrightarrow$

основные законы алгебры логики

- 1 закон рефлексивности
[переместительный закон
с самим собой]
 $A \vee A = A$
 $A \wedge A = A$

- 2 закон коммутативности
[переместительный закон]
 $A \vee B = B \vee A$
 $A \wedge B = B \wedge A$



- 3 закон ассоциативности
[сочетательный закон]

$$[A \vee B] \vee C = A \vee [B \vee C]$$

$$[A \wedge B] \wedge C = A \wedge [B \wedge C]$$

- 5 законы поглощения

$$A \vee [A \wedge B] = A$$

$$A \wedge [A \vee B] = A$$

$$A \vee [\bar{A} \wedge B] = A \vee B$$

- 7 закон отрицания отрицания

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

- 9 закон исключенного третьего

$$A \vee \bar{A} = 1$$

- 4 закон дистрибутивности
[распределительный закон]

$$A \vee B \wedge C = [A \vee B] \wedge [A \vee C]$$

$$A \wedge [B \vee C] = A \wedge B \vee A \wedge C$$

- 6 законы де Моргана

$$\overline{[A \wedge B]} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{[A \vee B]} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

- 8 закон непротиворечия

$$A \wedge \bar{A} = 0$$

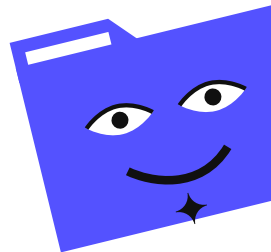
- 10 законы работы с константами

$$A \wedge A = 0$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee 0 = A$$

$$A \vee 1 = 1$$



выражение логических операций через базис

базис Буля— набор операций, через которые можно выражать любые другие.

базис Буля: логическое « $\wedge$ », логическое « $\vee$ » и логическое « $\neg$ ».

- 1 импликация:

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

- 2 эквивалентность:

$$A \equiv B = [\bar{A} \wedge \bar{B}] \vee [A \wedge B]$$

$$A \equiv B = [\bar{A} \wedge B] \vee [A \wedge \bar{B}]$$



применение законов и свойств

дано: $F = [x \equiv z] \vee [x \rightarrow (y \wedge z)]$

задача: упростить выражение

- 1) раскроем импликацию и эквивалентность в базисе Буля:

$$[x \equiv z] = \bar{x} \wedge \bar{z} \vee x \wedge z$$

$$x \rightarrow (y \wedge z) = \bar{x} \vee (y \wedge z)$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

$$A \equiv B = \bar{A} \bar{B} \vee AB$$

получаем функцию:

$$F = \bar{x} \wedge \bar{z} \vee x \wedge z \vee \bar{x} \vee (y \wedge z)$$

конъюнкцию, как умножение в обычной математике, можно опустить:

$$F = \bar{x} \bar{z} \vee xz \vee \bar{x} \vee yz$$

- 2) используем закон поглощения:

тогда $F = xz \vee \bar{x} \vee yz$

$$\bar{A} \bar{B} \vee \bar{A} = \bar{A}$$

- 3) применяем дистрибутивный закон

промежуточный результат:

$$F = \bar{x} \vee [x \vee y]z$$

$$AC \vee BC = [A \vee B]C$$

- 4) используем коммутативность:

$$F = [\bar{x} \vee (x \vee y)](\bar{x} \vee z)$$

$$\bar{A} \vee BC = [\bar{A} \vee B](\bar{A} \vee C)$$

- 5) рассмотрим первую скобку:

$$[\bar{x} \vee x \vee y] = [1 \vee y] = 1$$

остается только вторая скобка:

$$[\bar{x} \vee z]$$

- 6) та-даам!

$$F = [x \equiv z] \vee [x \rightarrow (y \wedge z)] = \bar{x} \vee z$$

пример задания из егэ

$$F = [x \equiv z] \vee [x \rightarrow (y \wedge z)]$$

???	???	???	F
0	1		0
	1	1	0

$$\begin{cases} [x \equiv z] = 0 \\ [x \rightarrow (y \wedge z)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z \neq x \\ x = 1 \\ y \wedge z = 0 \end{cases}$$

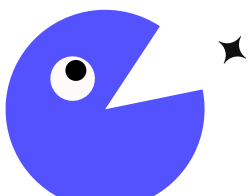
$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \\ y - \text{не важно} \end{cases}$$

ответ: ZXY

решение:

- 1) во всех строках фрагмента таблицы $F = 0$:
- 2) следовательно: $[x \leftrightarrow z] = 0$ и $[x \rightarrow (y \wedge z)] = 0$ - ведь дизъюнкция равна 0, когда нулю равны оба дизъюнкта
- 3) посмотрим первый дизъюнкт:
 $[x \leftrightarrow z] = 0$ значит, $z \neq x$
- 4) теперь второй дизъюнкт:
 $[x \rightarrow (y \wedge z)] = 0$
 следовательно: $x = 1$ и $y \wedge z = 0$
- 5) объединим 4) и 3) $x = 1, z \neq x$ следовательно: $z = 0$
- 6) объединим 5) и 4) получим: $y \wedge 0 = 0$, а это верно при любом y

и вот результат: ZXY



решим это же задание с помощью кода

$$F = [x \equiv z] \vee [x \rightarrow [y \wedge z]]$$

???	???	???	F
0	1		0
	1	1	0



используем функцию product из библиотеки itertools

```
...  
# Импортируем библиотеку itertools  
import itertools  
  
# Для наглядности выводим данные переменные  
print('x y z')  
  
# Создаем список всевозможных комбинаций элементов 0 и 1, каждая  
# комбинация имеет длину 3  
# Для каждой комбинации значений переменных x, y и z проверяем  
# значение F  
# Если F = 0, выводим комбинацию переменных  
for i in itertools.product('01', repeat=3):  
    x, y, z = i  
    F = (x == z) or (x <= (y and z))  
    if F == 0:  
        print(x, y, z)
```

а чтобы разобраться в решении
через itertools, смотри этот видос



[ссылка](#)

